page 96
1987
M'-Math 1
ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES
STATISTICIENS ÉCONOMISTES
À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

Juin 1987. — Option MATHÉMATIQUES

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS. DÉFINITIONS ET RAPPELS.

On notera $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On s'intéresse dans ce problème au sous-ensemble de $\mathcal{F}$ constitué des fonctions f qui sont sous-additives, c'est-à-dire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^N \quad \forall x' \in \mathbb{R}_+^N \quad 0 \leqslant f(x+x') \leqslant f(x) + f(x').$$

On notera $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions sous-additives de $\mathbb{R}_+^N$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour tout f élément de $\mathcal{F}$ on appelle épigraphe de f et on note $\mathcal{E}(f)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}_+^{N+1}$ défini par :

$$\mathcal{E}(f) = \{ (x, t) \in \mathbb{R}_+^{N+1}, \ f(x) \leqslant t \}.$$

On dit qu'une fonction f, définie sur $\mathbb{R}_+^N$, est convexe si et seulement si elle vérifie :

$$\forall t \in [0,1] \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N \quad \forall x' \in \mathbb{R}_+^N \quad f(tx + (1-t)x') \leqslant tf(x) + (1-t)f(x').$$

On dit qu'une fonction f est concave si et seulement si $(-f)$ est convexe. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}_+^N$, x_i désigne sa i-ème composante, $i = 1, \ldots, N$. Enfin pour tout nombre réel t on note $[t]$ sa partie entière, définie par :

$$[t] = \text{Sup} \{ n \in \mathbb{Z}, \ n \leqslant t \}.$$

I. GÉNÉRALITÉS.

Dans toute cette partie, f désigne un élément quelconque de $\mathcal{F}$.

I.1. Montrer que f appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si l'épigraphe de f est stable par addition :

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (\forall a \in \mathcal{E}(f), \ \forall a' \in \mathcal{E}(f), \ (a + a') \in \mathcal{E}(f)).$$

I.2. Montrer que $\mathcal{S}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \ \forall f \in \mathcal{S}, \ t.f \in \mathcal{S};$$
$$\forall f \in \mathcal{S}, \ \forall f' \in \mathcal{S}, \ (f + f') \in \mathcal{S}.$$

I.3. On pose :

$$A(f) = \{ g \in \mathcal{S}, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^N, \ g(x) \leqslant f(x) \}$$

et, pour tout x de $\mathbb{R}_+^N$:

$$\bar{f}(x) = \text{Sup} \{ g(x), g \in A(f) \}.$$

a. Montrer que la fonction ainsi définie appartient à $\mathcal{S}$.

b. Prouver que :

$$f \in \mathcal{S} \Leftrightarrow f = \bar{f}.$$

I.4. On pose, pour tout x de $\mathbb{R}_+^N$ et k entier strictement positif :

$$I_k(x) = \{ (y^1, \ldots, y^k) \in (\mathbb{R}_+^N)^k, \ \sum_{i=1}^{k} y^i = x \}$$

et :

$$\bar{\bar{f}}(x) = \text{Inf} \{ \sum_{i=1}^{k} f(y^i), \ k \geqslant 1 \text{ et } (y^1, \ldots y^k) \in I_k(x) \}.$$

a. Montrer que la fonction ainsi définie appartient à $\mathcal{S}$.

b. Montrer que $\bar{f} = \bar{\bar{f}}$.

I.5. Soit f un élément de $\mathcal{F}$ tel que :

$$(H) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^N, \ \forall \lambda \geqslant 0, \ f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Montrer que f appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si f est convexe.

I.6. Caractériser les sous-ensembles A de $\mathbb{R}_+^N$ dont la fonction indicatrice f_A est sous-additive :

$$\begin{cases} f_A(x) = 1 & \text{si } x \in A \\ f_A(x) = 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Tournez la page S. V. P.

I.7. Est-ce que les fonctions suivantes appartiennent à $\mathfrak{S}$:

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^{N} [x_i],$$

$$h_2(x) = \sum_{i=1}^{N} x_i - h_1(x) ?$$

II. Le cas unidimensionnel.

Dans toute cette partie on prend N = 1. On considère donc une fonction f de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$ et on définit une fonction p de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_-$ en posant :

$$\forall\, x > 0,\ p(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

II.1. Montrer que si p est décroissante, alors f est sous-additive.

II.2. Montrer que si f est concave, alors f est sous-additive (on pourra se ramener à la question précédente).

II.3. On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et p admet une limite à droite en 0.

Montrer que si f est sous-additive alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*\quad f'(x) \leqslant \lim_{t \to 0^+} p(t).$$

II.4. Pour tout réel positif c, on définit f_c et p_c par :

$$\forall\, x \geqslant 0,\quad f_c(x) = \mathrm{Min}\,\{x^2, 1\} + c$$

$$\forall\, x > 0,\quad p_c(x) = \frac{f_c(x)}{x}.$$

a. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur c pour que f_c soit sous-additive.

b. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur c pour que p_c soit décroissante.

c. Conclusion ?

III. Un cas particulier.

On s'intéresse dans cette partie à la fonction suivante, définie sur $\mathbb{R}_+^2$:

$$F(x) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1 x_2}$$

et on pose, pour tout (t, x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^2$:

$$\Phi(t, x) = F(tx) \quad \text{et} \quad P(t, x) = \frac{F(tx)}{t}.$$

III.1. Montrer que pour tout x, l'application partielle $P(., x)$ est décroissante.

III.2. En déduire que pour tout x, l'application partielle $\Phi(., x)$ est sous-additive.

III.3. On veut montrer que F est concave.

Pour cela on écrit F comme somme de trois fonctions :

$$F_1(x) = \sqrt{x_1},\ F_2(x) = \sqrt{x_2},\ F_3(x) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

a. Vérifier que F_1 et F_2 sont concaves.

b. Montrer que F_3 est sur-additive, c'est-à-dire que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^N\quad \forall\, x' \in \mathbb{R}_+^N\qquad F_3(x + x') \geqslant F_3(x) + F_3(x').$$

c. Montrer que F_3 est concave (on pourra utiliser le résultat de la question I.5.).

d. En déduire le résultat cherché.

III.4. Montrer que F n'est pas sous-additive. Conclusion ?

IV. Une condition nécessaire de sous-additivité.

On revient dans cette partie au cas général, avec N > 1. On considère une fonction f de $\mathbb{R}_+^N$ dans $\mathbb{R}_-$ et on pose, pour tout (t, x) de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^N$: $\varphi(t, x) = f(tx)$.

- On dit que f est radialement sous-additive si par définition :

(RS) $\qquad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^N,\ t \longrightarrow \varphi(t, x)$ est sous-additive.

- On dit que f est orthogonalement sous-additive si par définition :

(OS) $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+^N, \forall\, x' \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i=1}^{N} x_i x_i' = 0 \Rightarrow f(x + x') \leqslant f(x) + f(x')$.

Tournez la page S. V. P.

ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE
M'-Math 1
page 97
1987

IV.1. Est-ce que la fonction F, étudiée dans la partie III, vérifie (RS) et (OS) ?

IV.2. Montrer que toute fonction sous-additive vérifie (RS) et (OS).

IV.3. On définit une fonction G de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$ en posant :

$$G(x_1, x_2) = \begin{cases} x_2 + \dfrac{x_1^2}{x_2} & \text{si } x_1 \leqslant x_2 \\ x_1 + \dfrac{x_2^2}{x_1} & \text{si } x_2 \leqslant x_1 \end{cases}$$

a. Montrer que G vérifie (RS) et (OS).

b. Montrer que G n'est pas sous-additive.

V. Une condition suffisante de sous-additivité.

On définit deux conditions, portant sur des éléments f de $\mathcal{F}$:

(C) $\forall x \in \mathbb{R}_+^N, \forall y \in \mathbb{R}_+^N, \forall z \in \mathbb{R}_+^N,$

$$f(x + z) - f(x) \geqslant f(x + y + z) - f(x + y) ;$$

(C_0) $\forall x \in \mathbb{R}_+^N, \forall y \in \mathbb{R}_+^N, \forall z \in \mathbb{R}_+^N,$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i z_i = 0 \Rightarrow (f(x + z) - f(x) \geqslant f(x + y + z) - f(x + y)).$$

V.1. *a.* Montrer que si f vérifie (C) alors $f \in \mathcal{S}$;

b. Montrer que (C_0) implique (OS).

V.2. Donner une interprétation de (C) dans le cas où $N = 1$, et montrer que dans ce cas :

f vérifie (C) $\Leftrightarrow$ f est concave.

V.3. On suppose dans cette question que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et l'on se propose de montrer que (C) est équivalente à la condition suivante :

(N1) $\forall x \in (\mathbb{R}_+^*)^N \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\},$

$$\forall j \in \{1, \ldots, N\}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \leqslant 0.$$

a. Par un choix judicieux de y et z montrer que (C) implique la propriété suivante :

(N2) $\forall x \in (\mathbb{R}_+^*)^N, \forall h \in \mathbb{R}_+^N, \forall k \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) h_i k_j \leqslant 0.$

b. Réciproquement, montrer que (N2) implique (C).

c. En déduire que (C) est équivalente à (N1).

d. Trouver une condition analogue à (N1) qui est équivalente à (C_0).

VI. Une autre condition suffisante de sous-additivité.

Pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}_+^N$ on note :

$$H(x, y) = \{ z \in \mathbb{R}_+^N, \sum_{i=1}^{N} x_i (y_i - z_i) = 0 \}.$$

Soit f une fonction de $\mathbb{R}_+^N$ dans $\mathbb{R}_+$. On dit qu'elle est transversalement convexe si elle vérifie :

(TC) $\forall y \in \mathbb{R}_+^N \quad \exists x \in (\mathbb{R}_+^*)^N \quad \forall z \in H(x, y), \quad \forall z' \in H(x, y)$

$$\forall t \in [0,1] \quad f(t z + (1 - t) z') \leqslant t f(z) + (1 - t) f(z')$$

Montrer que si f est transversalement convexe et radialement sous-additive, alors elle est sous-additive.

• • •

page 98 1987 ECOLE NATIONALE de l'ADMINISTRATION ECONOMIQUE M'-Math 1